

قصه‌هایی دربارهٔ جدول ضرب!

اولین قصه: زوج و فرد

■ آمنه ابراهیم زاده طاری، بهزاد اسلامی مسلم

■ **کلیدواژه‌ها:** جدول ضرب، ضرب، عدد زوج، عدد فرد

در این جدول، عددهای زوج را نارنجی و عددهای فرد را سفید می‌کنیم:

×	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶	۴۰
۵	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
۶	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰
۷	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳	۷۰
۸	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲	۸۰
۹	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱	۹۰
۱۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰

چه الگوهای جالبی!

با این رنگ‌آمیزی، در جدول چند الگوی جالب دیده می‌شود:
الگوی ۱. بعضی ردیف‌ها کاملاً نارنجی هستند. یعنی در آن‌ها همهٔ عددها زوج هستند:



الگوی ۲. بقیهٔ ردیف‌ها نیمه نارنجی هستند. یعنی عددهای زوج، یکی در میان می‌آیند:

مدت‌هاست که با جدول ضرب آشنا هستید. اما ممکن است به مسئله‌های جالبی که دربارهٔ همین جدول ظاهراً ساده وجود دارد، برنخورده باشید. در هر شماره از برهان امسال، با چنین مسئله‌هایی روبه‌رو می‌شوید. این دفعه، دربارهٔ عددهای زوج و فرد در جدول ضرب صحبت می‌کنیم.



جدول زیر، همان جدول ضرب 10×10 است.

×	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶	۴۰
۵	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
۶	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰
۷	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳	۷۰
۸	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲	۸۰
۹	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱	۹۰
۱۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰



الگوی ۳. ردیف‌های نارنجی، یکی در میان دیده می‌شوند. نگاه کنید:

• خانه‌های کدام ردیف‌ها کاملاً نارنجی هستند؟

ردیف‌های شماره ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰.

• خانه‌های کدام ردیف‌ها یکی در میان نارنجی و سفیداند؟

ردیف‌های شماره ۱، ۳، ۵، ۷، ۹.

شاید منظورمان از شماره ردیف واضح نباشد. در سمت چپ جدول قبل، در ابتدای هر ردیف خانه‌ای سفید وجود دارد. شماره ردیف، عدد همین خانه است. مثلاً شماره ردیف زیر، ۳ است:

۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

شماره ردیف

دلیل برقرار بودن الگوها

بیایید به جدول ضرب ۹۰۰×۹۰۰ توجه کنیم. توضیح می‌دهیم که چرا الگوهای ۱ و ۲ و ۳ در این جدول هم برقرارند.

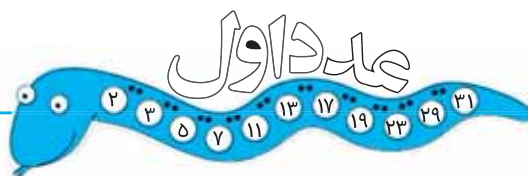
الگوی ۱. هر ردیف با شماره زوج، کاملاً نارنجی است.

به ردیفی توجه کنید که شماره‌اش زوج باشد. مثلاً ردیف ۸۷۲. عددهای این ردیف چه‌طور به دست می‌آیند؟ در جدول زیر، فقط ردیف ۸۷۲ را مشخص کرده ایم و به جای بقیه ردیف‌ها، «...» گذاشته‌ایم.

×	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
۸۷۲									

سؤال. اگر به جای جدول ضرب ۱۰×۱۰ ، جدول ضرب ۴۰×۴۰ را بنویسیم، باز هم همین الگوها دیده می‌شوند؟ اگر جدول ضرب ۹۰۰×۹۰۰ را بنویسیم چه‌طور؟ آیا می‌توانیم بدون نوشتن جدول ضرب ۹۰۰×۹۰۰ ، مطمئن باشیم که الگوهای ۱، ۲ و ۳ در این جدول هم برقرارند؟

پاسخ مثبت است! بدون اینکه جدول ضرب ۹۰۰×۹۰۰ را بنویسیم، مطمئن هستیم که این الگوها در آن هم وجود دارند. از کجا می‌دانیم؟ برای ادعایمان دلیل داریم! با ما همراه باشید.



در سال ۱۷۴۲ ریاضی‌دانی به نام گلدباخ، حدس جالبی درباره اعداد اول زد. او حدس زد هر عدد زوجی که از ۲ بزرگ‌تر باشد را می‌توانیم به صورت حاصل جمع دو عدد اول بنویسیم. مثلاً

$$۴=۲+۲ \quad \text{و} \quad ۶=۳+۳ \quad \text{و} \quad ۸=۳+۵ \quad \text{و} \quad ۴۲=۳۷+۵ \quad \text{و} \quad ۱۸۰=۹۷+۸۳$$

ریاضی‌دان‌ها حدس گلدباخ را در مورد خیلی از عددهای زوج امتحان کردند، حتی عددهای زوج خیلی خیلی بزرگ. همه عددهایی را که امتحان کردند توانستند به صورت جمع دو عدد اول بنویسند. برای همین احتمال زیادی می‌دهند که حدس گلدباخ درست باشد، ولی هنوز یک دلیل ریاضی برای درست بودن این حدس پیدا نکرده‌اند.

گلدباخ یک حدس بامزه دیگر هم زده بود. حدس زده بود هر عدد فرد که از ۵ بزرگ‌تر باشد را می‌توانیم به صورت حاصل جمع سه عدد اول بنویسیم. مثلاً $۱۵=۵+۵+۵$ یا $۲۱=۱۱+۷+۳$.

این حدس برخلاف حدس قبلی، سال گذشته ثابت شد. هارالد هلفگات، ریاضی‌دانی بود که دلیلی برای درستی این حدس قدیمی پیدا کرد.

• اولین عدد این ردیف برابر است با ۸۷۲×۱ .

• دومین عدد: ۸۷۲×۲ .

• سومین عدد: ۸۷۲×۳ .

• چهارمین عدد: ۸۷۲×۴ .

• پنجمین عدد: ۸۷۲×۵ .

خلاصه اینکه هر عددی در این ردیف از ضرب ۸۷۲ در عددی دیگر به دست آمده است. آیا حاصل ضرب می‌تواند فرد باشد؟ خیر، غیرممکن است. زیرا ۸۷۲ زوج است. پس در هر عددی ضرب شود، حاصل زوج می‌شود. یعنی همهٔ عددهای این ردیف زوج‌اند و ردیف کاملاً نارنجی است.

در توضیح بالا، مهم نبود که شمارهٔ ردیف دقیقاً ۸۷۲ است! فقط به این توجه کردیم که ۸۷۲ زوج است. در نتیجه، همین دلیل در مورد بقیهٔ ردیف‌های با شمارهٔ زوج هم درست است. پس معلوم شد که در هر ردیف با شمارهٔ زوج، همهٔ عددها زوج‌اند. یعنی هر ردیف با شمارهٔ زوج، کاملاً نارنجی است.

الگوی ۲. در هر ردیف با شمارهٔ فرد، خانه‌های نارنجی یکی در میان هستند.

به ردیفی توجه کنید که شماره‌اش فرد باشد. مثلاً ردیف ۶۳۷ . عددهای این ردیف چه‌طور به‌دست می‌آیند؟



$\times$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
۶۳۷									

• اولین عدد این ردیف برابر است با ۶۷۳×۱ .

• دومین عدد: ۶۷۳×۲ .

• سومین عدد: ۶۷۳×۳ .

• چهارمین عدد: ۶۷۳×۴ .

• پنجمین عدد: ۶۷۳×۵ .

و عددهای دیگر این ردیف، به همین ترتیب به دست می‌آیند. بدون حساب کردن این حاصل‌ضرب‌ها، می‌توانیم بگوییم کدام‌ها فردند و کدام‌ها زوج. آیا می‌توانید بگویید به چه روشی؟ به این روش: می‌دانیم که

• اگر دو عدد فرد را در هم ضرب کنیم، عددی فرد به دست می‌آید.

• اگر عددی فرد را در عددی زوج ضرب کنیم، به عددی زوج می‌رسیم.

در ردیف شمارهٔ ۶۷۳ ، چه اتفاقی می‌افتد؟ این عدد ابتدا در عددی فرد ضرب می‌شود، سپس در عددی زوج، بعد در عددی فرد، بعد در عددی زوج، و به همین ترتیب.

۶۷۳ فرد است. پس اولین خانه، عددی فرد است. دومی زوج. بعدی فرد. بعدی زوج، و به همین ترتیب.

...	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	$\times$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	فرد

پس در این ردیف، خانه‌های زوج یکی در میان می‌آیند، یعنی خانه‌ها یکی در میان نارنجی‌اند.

در توضیحی که خواندید، مهم نبود که شمارهٔ ردیف دقیقاً ۶۷۳ است! فقط به این توجه کردیم که ۶۷۳ فرد است. همین دلیل در مورد بقیهٔ ردیف‌های با شمارهٔ فرد هم درست است.

پس در هر ردیفی که شماره‌اش فرد است، خانه‌ها یکی در میان زوج‌اند. یعنی خانه‌ها یکی در میان نارنجی‌اند.

الگوی ۳. سطرهای نارنجی، یکی در میان هستند.

شمارهٔ سطرهای نارنجی، عددهای زوج هستند. شمارهٔ سطرهای نیمه نارنجی، عددهای فردند. عددهای زوج یکی در میان هستند. پس سطرهای نارنجی هم یکی در میان دیده می‌شوند.

در شمارهٔ بعدی برهان، دربارهٔ مسئله‌ها و الگوهای جالب دیگری از جدول ضرب صحبت خواهیم کرد.